

#### 4. Aufgabe – Anschauliche Bedeutung der Divergenz

Sieht man das Vektorfeld als Strömung an, dann ist die Divergenz ein Mass für die Änderung der Strömungsstärke (in Strömungsrichtung). Dazu stellt man sich ein kleines, durchlässiges Kästchen vor, das in die Strömung gelegt wird: fliesst mehr hinaus als hinein, ist die Strömung offenbar stärker geworden (die Divergenz ist im Kästchen positiv). Entsprechend, wenn weniger aus dem Kästchen hinausströmt, wird die Strömung abgeschwächt (die Divergenz ist im Kästchen negativ).

- a.) Schätze ob die Divergenz der Vektorfelder in Abbildung 1 im jeweils markierten Punkt positiv, negativ oder Null ist (mit Begründung).

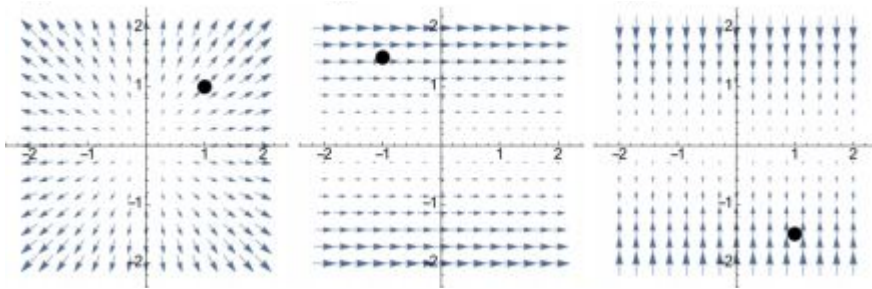


Abbildung 1: Vektorfelder aus Aufgabe a.)

Im ersten Vektorfeld (von rechts nach links) ist gut erkennbar, dass die Divergenz positiv ist. Durch genaueres Betrachten ist ersichtlich, dass die Vektoren aus radialer Richtung mit grösserer Distanz vom Nullpunkt im Betrag zunehmen.

Nach der obigen Beschreibung für Divergenz entspricht dies genau einer an Stärke zunehmenden Strömung im betrachteten Punkt, also einer positiven Divergenz.

Im mittleren Vektorfeld ist erkennbar, dass für jede gerade die mit den Vektoren dargestellt wird (von der Form  $y = a$ ), sich der Betrag der jeweiligen geraden-darstellenden Vektoren nicht verändert. Mit anderen Worten: Die Vektoren bestehen nur aus einer  $x$ -Richtung und haben für jede Höhe von  $y$  einen konstanten Wert.

Demnach ist der Betrag an zugeführter und wegfließender Strömung im untersuchten Punkt gleich, womit die Strömung gleich Null ist.

Im letzten Vektorfeld zeigen sämtliche Vektoren senkrecht in Richtung der  $x$ -Achse. Ihr Betrag nimmt mit Annäherung an die  $x$ -Achse kontinuierlich ab.

Somit ist die Strömung im schwarzmarkierten Punkt negativ.

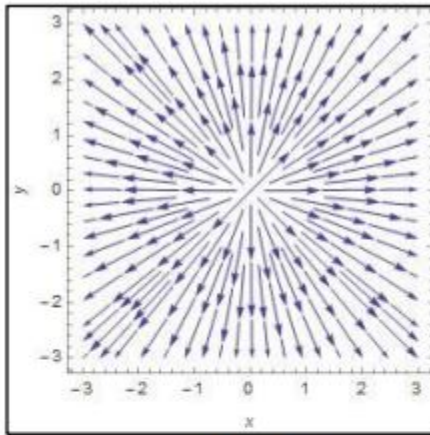
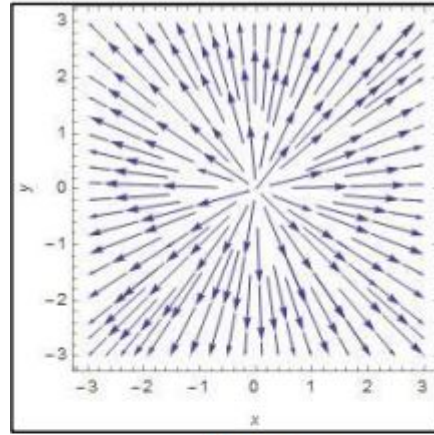
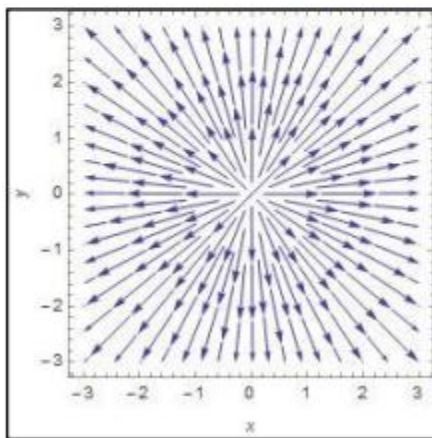
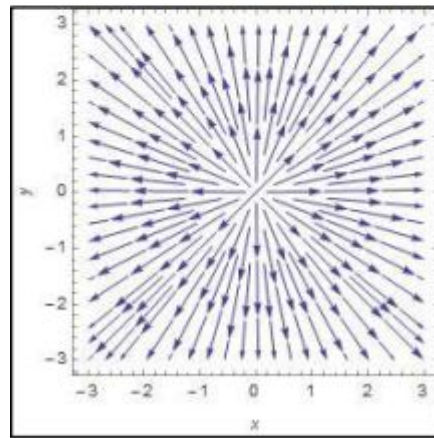
- b.) Unter anderem bestimmt natürlich die Längenänderung der Vektoren in der Umgebung eines Punktes die dortige Änderung der Strömungsstärke. Der genaue Zusammenhang soll am Beispiel des Vektorfeldes

$$V(x, y) = \frac{1}{(x^2 + y^2)^k} \cdot (x, y)$$

Untersucht werden (hierbei ist  $k \geq 0$ ).

Skizzieren Sie  $V$  für verschiedene  $k$ .

Dazu wurden die auf der Rückseite abgelichteten Abbildungen 2 - 5 geplottet. Die  $k$ -Werte sind anbei vermerkt.

Abbildung 2:  $V(x,y)$  mit  $k = 0$ Abbildung 3:  $V(x,y)$  mit  $k = 1/2$ Abbildung 4:  $V(x,y)$  mit  $k = 1$ Abbildung 5:  $V(x,y)$  mit  $k = 2$

- c.) Experimentiere und finde heraus, was eine Variation von  $k$  bewirkt. Gibt es einen einfachen Zusammenhang zwischen der Länge der Vektoren und der Divergenz von  $V$ ?

Wir sehen hier, dass der Vektor, den das Vektorfeld produziert der Ortsvektor des betrachteten Punktes multipliziert mit einem Faktor ist. Dieser Faktor, nämlich

$$\frac{1}{(x^2 + y^2)^k}$$

ist genau das Abstandsquadrat (oder der Betrag des Ortsvektors) mit einem Exponenten  $k$  invertiert. Für  $k=1$  ist der resultierende Vektor also

$$\vec{v} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^2}$$

Faktisch bedeutet dies ein radiales Vektorfeld, dessen "Stärke" mit dem Abstand vom Ursprung abnimmt, weil der Betrag des Ortsvektors linear zunimmt, der Vorfaktor wird jedoch exponentiell kleiner. Folgende Werte für  $k$  sind speziell:

- $k=0$ : Der Vektor des Feldes entspricht am Punkt  $(x,y)$  dem Ortsvektor  $(x,y)$
- $k=0.5$ : Das Vektorfeld produziert nur Vektoren der Länge 1
- $k=1$ : Die Länge der Vektoren nehmen mit dem Abstand vom Mittelpunkt quadratisch ab
- $k>1$ : Die Länge der Vektoren nehmen mit dem Abstand vom Mittelpunkt mit dem Exponent  $2*k$  ab
- $k<0$ : Die Länge der Vektoren nimmt mit dem Abstand vom Mittelpunkt mit dem Exponent  $2*(-k)$  zu

Man betrachte nun die Divergenz des Vektorfeldes. Sie wird ausgedrückt durch:

$$\text{Div}(V) = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

Für den vorliegenden zweidimensionalen Fall kann man die  $z$ -Komponente vernachlässigen, was zu folgendem Ausdruck führt:

$$\begin{aligned} \text{Div}(V) &= \frac{(x^2 + y^2)^k - x(k(x^2 + y^2)^{k-1})2x}{(x^2 + y^2)^{2k}} + \frac{(x^2 + y^2)^k - y(k(x^2 + y^2)^{k-1})2y}{(x^2 + y^2)^{2k}} \\ &= \frac{2(x^2 + y^2)^k - (x^2 + y^2)(2k(x^2 + y^2)^{k-1})}{(x^2 + y^2)^{2k}} = \frac{2(x^2 + y^2)^k}{(x^2 + y^2)^{2k}}(1 - k) \\ &= 2(x^2 + y^2)^{-k}(1 - k) \end{aligned}$$

Für die Länge eines beliebigen Vektors erhalten wir folgenden Ausdruck

$$|\vec{v}| = \sqrt{\left(\frac{x}{(x^2 + y^2)^k}\right)^2 + \left(\frac{y}{(x^2 + y^2)^k}\right)^2} = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}-k}$$

Somit ergibt sich zwar ein Zusammenhang zwischen der Länge der Vektoren und der Divergenz, jedoch durchaus kein "einfacher":

$$\text{Div}(V) = |\vec{v}| * \frac{2(1 - k)}{|\vec{r}|}$$

## Quellen

[https://www2.math.ethz.ch/education/bachelor/lectures/fs2016/other/analysis2\\_mavt\\_matl/handouts/dutto03.pdf](https://www2.math.ethz.ch/education/bachelor/lectures/fs2016/other/analysis2_mavt_matl/handouts/dutto03.pdf)